ФМИ НЛО 2018 - Домашна работа 1

Янис Василев, ianis@ivasilev.net, спец. Статистика, ф.н. 128

19 април 2018

Задача 1

Дадена е задачата:

$$\min z = (4-t)x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 - t$$
$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 + t$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

а) Да се изследва изменението на оптималното решение на дадената задача за стойности на параметъра $t \geq 0$.

б) При $t = 3$ да се приложат методите на следоптималния анализ за намиране на оптималното решение след добавяне на ново ограничение $x_2 \leq 1$.

Решение. а) Построяваме канонична задача и съответната симплекс таблица.

B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
		$4-t$	1	3	0	0	
x_4	0	2	-1	-1	1	0	$1-t$
x_5	0	-1	1	-2	0	1	$2+t$
$\bar{c}$		$4-t$	1	3	0	0	

Веднага виждаме, че при $t = 0$ решението е оптимално. Критерият за оптималност е изпълнен за стойности на $t \leq 4$, а критерият за допустимост - за $t \leq 1$. За $0 \leq t \leq 1 = t_1$ решение на изходната задача е векторът $x^* = (0, 0, 0)^T$, а стойността на целевата функция е $z^* = 0$.

Използвайки двойнствения симплекс метод, решаваме задачата за $t > 1$. Тогава x_4 излиза от базиса, понеже единствено $\bar{b}_1$ е отрицателно, а x_2 влиза в базиса, тъй като $\frac{\bar{c}_2}{-w_{4,2}} = 1 < 3 = \frac{\bar{c}_3}{-w_{4,3}}$. Получената симплексна таблица е

B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
		$4-t$	1	3	0	0	
x_2	1	-2	1	1	-1	0	$t-1$
x_5	0	1	0	-3	1	1	3
$\bar{c}$		$6-t$	0	2	1	0	

Тук $x^* = (0, t-1, 0)$, а $z^* = t - 1$. Критерият за допустимост е винаги изпълнен (за $t > 1$), а критерият за оптималност се нарушава при $t > 6 = t_2$. За $t > 6$ променливата x_1 влиза в базиса, а x_5 излиза, тъй като единствен кандидат за ключово число е $w_{2,1}$. Преминаваме към съседно БДР

B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
		$4-t$	1	3	0	0	
x_2	1	0	1	-5	1	2	$t+5$
x_1	$4-t$	1	0	-3	1	1	3
$\bar{c}$		0	0	$20-3t$	$t-5$	$t-6$	

Критерият за оптималност отново е нарушен при $t > \frac{20}{3}$, но тогава задачата става неограничена.

Пълното решение на задачата е

t	x^*	z^*
$0 \leq t \leq 1$	$(0,0,0)$	0
$1 \leq t \leq 6$	$(0, t-1, 0)$	$t-1$
$6 \leq t \leq \frac{20}{3}$	$(3, t+5, 0)$	$17-2t$

б) От горната таблица се вижда, че при $t = 3$ променливата $x_2 = 2$, следователно новото ограничение $x_2 \leq 1$ не е удовлетворено. Добавяме нова променлива x_6 и привеждаме уравнението в каноничен вид $x_2 + x_6 = 1$. Сега изразяваме базисната променлива x_2 чрез небазисни, използвайки първото ограничение.

$$x_2 = 2 + 2x_1 - x_3 + x_4$$

Новото ограничение може да бъде записано чрез

$$2x_1 - x_3 + x_4 + x_6 = -1.$$

Сега добавяме новото ограничение и използваме двойнствения симплекс метод, за да решим новата задача.

B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{b}$
		1	1	3	0	0	0	
x_2	1	-2	1	1	-1	0	0	2
x_5	0	1	0	-3	1	1	0	3
x_6	0	2	0	$\boxed{-1}$	1	0	1	-1
$\overline{c}$		3	0	2	1	0	0	
x_2	1	0	1	0	0	0	1	1
x_5	0	-5	0	0	4	1	3	6
x_3	3	-2	0	1	-1	0	-1	1
$\overline{c}$		7	0	0	3	0	2	

Оптималното решение на задачата с новото ограничение е $x^* = (0, 1, 1)$ и $z^* = 4$.

Задача 2

Дадена е задачата:

$$\max z = 3x_1 - x_3$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &\geq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 9 \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

Оптималните решения на съответната канонична и M-задача са дадени в таблицата:

B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\overline{b}$
		-3	0	1	0	0	M	M	
x_2	0	0	1	0	$-2/5$	$1/5$	$2/5$	$1/5$	3
x_3	1	0	0	1	$-2/5$	$1/5$	$2/5$	$-4/5$	1
x_1	-3	1	0	0	$1/5$	$2/5$	$-1/5$	$-3/5$	2
$\overline{c}$		0	0	0	1	1	$M-1$	$M-1$	5

а) Намерете интервалите на устойчивост на коефициентите $c_1 = 3, c_3 = -1$ и $b_2 = 9$.

б) Обяснете какво ще се случи с оптималното решение, ако бъде променен векторът b на $b' = (0, 2, 1)^T$.

Решение. Първо да отбележим, че тъй като първоначалният базис е $[e_2, e_1, e_3]$, обратната матрица също е $[e_2, e_1, e_3]$. Следователно обратната на базисната матрица $\mathbf{B}$ в оптималното решение е $[w_6, w_5, w_7]$, където $w = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$, тоест

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 & -4/5 \\ -1/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

а) Нека $c_i' = c_i + \delta$, където $i \in B$ и $\delta \in \mathbb{R}$. След като индексът i е базисен се променя векторът на относителните оценки (достатъчно е да вземем само колоните от каноничната задача, изключвайки x_6 и x_7). Базисните оценки продължават да бъдат нули, а небазисните относителните оценки имат вида

$$\overline{c}_j' = c_j - c_B'^T w_{\cdot j} = c_j - (c_B + \delta e_i)^T w_{\cdot j} = \overline{c}_j - \delta w_{ij} = \overline{c}_j - w_{ij}\delta,$$

където $w = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$, $w_{\cdot j}$ е j-тия стълб на w, а $w_{i\cdot}$ е редът, съответстващ на променливата x_i. Интервалите ще бъдат обърнати за изходната задача, тоест условието $\delta \in [\alpha, \beta]$ в каноничната задача е еквивалентно на $\delta \in [-\beta, -\alpha]$ в изходната.

За да се запази критерият за оптималност при промяна на c_1, трябва да бъдат изпълнени неравенствата $\overline{c}_j' = \overline{c}_j - w_{1j}\delta \geq \vec{0} \iff w_{1j}\delta \leq \overline{c}_j \ \forall j \in N$. Имаме

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\delta \leq 1 \\ \frac{2}{5}\delta \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \delta \leq 5 \\ \delta \leq \frac{5}{2} \end{cases} \iff \delta \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$$

в каноничната задача, или $\delta \geq -\frac{5}{2}$ в изходната. Стойността на целевата функция е $z'^* = 5 + 2\delta$.

Аналогично, за c_3 имаме

$$\begin{cases} -\frac{2}{5}\delta \leq 1 \\ \frac{1}{5}\delta \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \delta \geq -\frac{5}{2} \\ \delta \leq 5 \end{cases} \iff \delta \in \left[-\frac{5}{2}, 5\right]$$

в каноничната задача, или $\delta \in \left[-5, \frac{5}{2}\right]$ в изходната. Стойността на целевата функция е $z'^* = 5 - \delta$.

При промяна в j-тата координата в дясната част, векторът $\overline{b}' = \mathbf{B}^{-1}b$ има вида $\overline{b}' = \mathbf{B}^{-1}b' = \mathbf{B}^{-1}(b + \delta e_j) = \overline{b} + \delta\mathbf{B}^{-1}_{\cdot j}$, където $\mathbf{B}^{-1}_{\cdot j}$ е j-тия стълб на $\mathbf{B}^{-1}$.

За да се запази критерият за допустимост при промяна на b_2, трябва да бъде изпълнено векторното неравенство $\delta\mathbf{B}^{-1}_{\cdot 2} = \delta w_{\cdot 5} \geq -\overline{b}$, което е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\delta \geq -3 \\ \frac{1}{5}\delta \geq -1 \\ \frac{2}{5}\delta \geq -2 \end{cases} \iff \begin{cases} \delta \geq -15 \\ \delta \geq -5 \\ \delta \geq -\frac{10}{2} = -5 \end{cases} \iff \delta \geq -5.$$

Решението на задачата зависи от δ и е равно на $x'^* = (2 + \frac{2}{5}\delta, 3 + \frac{1}{5}\delta, 1 + \frac{1}{5}\delta)$, а стойността на целевата функция е $z'^* = 5 + \delta$.

б) Нека да заменим вектора $b = (2, 9, 2)^T$ с $b' = (0, 2, 1)^T$. Пресмятаме $\overline{b}' = \mathbf{B}^{-1}b'$:

$$\overline{b}' = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 & -4/5 \\ -1/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

Критерият за допустимост не е изпълнен и се намираме в псевдооптимално решение. Използваме двойнствения симплекс метод, за да намерим ново оптимално решение:

B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
		-3	0	1	0	0	
x_2	0	0	1	0	$-2/5$	$1/5$	$3/5$
x_3	1	0	0	1	$\boxed{-2/5}$	$1/5$	$-2/5$
x_1	-3	1	0	0	$1/5$	$2/5$	$1/5$
$\bar{c}$		0	0	0	1	1	
x_2	0	0	1	-1	0	0	1
x_4	0	0	0	$-5/2$	1	$-1/2$	1
x_1	-3	1	0	$1/2$	0	$1/2$	0
$\bar{c}$		0	0	$5/2$	0	$3/2$	

Новото оптимално решение $x'^{*} = (0, 1, 0)^T$ и $z'^{*} = 0$.